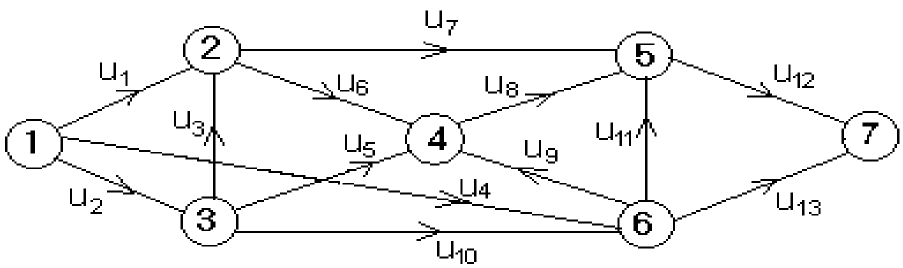
Université A/Mira de Béjaia
Département d'Informatique
3e année Licence Académique (2012/2013).

Date : 18/04/2013

Examen de rattrapage de Théorie des Graphes
Durée 2 heures

Exercice 1. (06 pts) Soit le graphe suivant :



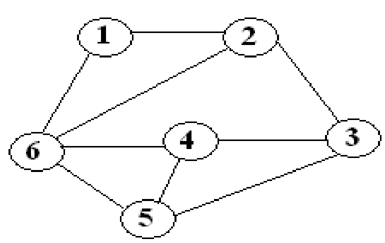
1. Déterminer sa matrice d'adjacence puis étudier ses propriétés ;
2. Est-il sans circuit ? si oui, donner sa mise à niveau ;
3. Déterminer son noyau s'il existe ;
4. Donner une base fondamentale de cycles et une base fondamentale de cocycles du graphe.

Exercice 2. (04 pts) Soit $G = (X, U)$ un graphe où $|X| = n$ et $|U| = m$.

1. Montrer que si G est un 1-graphe fortement connexe alors il possède $m-n+1$ circuits élémentaires indépendants.
2. Montrer que si G est sans circuits alors il admet $n - p$ cocircuits indépendants (p est le nombre de composantes connexes de G).

Exercice 3. (04 pts) Soit $G = (X, U)$ un graphe simple (non orienté) et k un nombre entier. Le graphe G est appelé un k-arbre, s'il possède un sous ensemble de k arêtes $B \subset U$ tel que : le graphe partiel $G' = (X, U \backslash B)$ soit un arbre dans G.

1. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   a- G est un k-arbre
   b- G est connexe et possède $(n + k - 1)$ arêtes
   c- G est connexe et par suppression d'un sous ensemble quelconque de $k + 1$ arêtes n'est plus connexe.
2. En déduire que le graphe suivant est un 4-arbre



Exercice 4. (06 pts) Soit $R = (X, U, d)$ un réseau où X est l'ensemble des sommets, U est l'ensemble des arcs et d est une application définie de U dans $\mathbb{R}$ qui associe à chaque arc $u \in U$ un nombre $d(u) \in \mathbb{R}$ appelé longueur de l'arc. Nous utiliserons les notations suivantes :

- S : ensemble des sommets dont on a calculé la plus courte distance ;
- $\bar{S} = X - S$;
- A : arborescence des plus courtes distances ;
- Π est l'application définie de X dans $\mathbb{R}$ qui associe à chaque sommet $x \in X$ son potentiel $\Pi(x) \in \mathbb{R}$ qui représente la plus courte distance (longueur du plus court chemin) de s à x (s un sommet fixé).

Considérons l'algorithme suivant :

(0) On pose $S = \{s\},\ \Pi(s) = 0,\ A = \varnothing$;

(1) On cherche un sommet $y \in \bar{S}$ tel que $\Gamma^{-1}(y) \subset S$;

– Si un tel sommet n'existe pas :

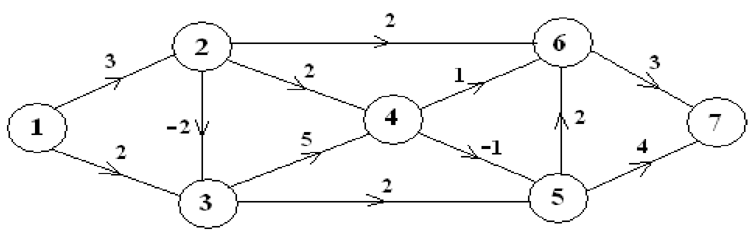
soit $S = X$, soit s n'est pas une racine, terminer ;

– Si un tel sommet existe : aller en (2) ;

(2) On calcule $\Pi(y) = \min\limits_{\{u \in U : T(u) = y\}} \{\Pi(I(u)) + d(u)\} = \Pi(I(\tilde{u})) + d(\tilde{u})$;

On pose $A = A \cup \{\tilde{u}\},\ S = S \cup \{y\}$ et aller en (1).

1. Que fait cet algorithme ?
2. Appliquer le (l'algorithme) au graphe suivant en prenant $s = 1$.



$*$ $\mathcal{A}$*fud igerrzen* $*$ $\mathcal{B}$*on courage* $*$